Präsenzübung zu den Rechenmethoden der Physik

28. 4. 2000 SS 2000

1. Matrixexponentialfunktion

Betrachten Sie die Bewegungsgleichung für den harmonischen Oszillator $m\ddot{x} = -\kappa x$, mit $\kappa = m\omega^2$, und schreiben Sie diese mit dem Impuls $p = m\dot{x}$ als ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung in Matrixform. Die erhaltene Beziehung nimmt in den Variablen $\tilde{p} := \frac{p}{\sqrt{m\omega}}$ und $\tilde{x} := x\sqrt{m\omega}$ eine einfachere Gestalt an.

(a) Welche formale Lösung können Sie mit Hilfe der Matrixexponentialfunktion exp(A) ($A = ?$) sofort aufschreiben?

(b) Geben Sie die Definition der Matrixexponentialfunktion in Form einer Potenzreihe an.

Die Auswertung der Matrixexponentialfunktion soll auf zwei unterschiedlichen Wegen erfolgen.

(a) Berechnen Sie zunächst die Potenzen A^k, $k = 0, \ldots, 4$. Daran können Sie das Bildungsgesetz für alle höheren Potenzen ablesen. Die einzelnen Einträge in exp A können nun bequem zusammen gefasst werden und sollten mit Blick auf die bekannte Oszillatorlösung ein “Aha”-Erlebnis auslösen.

Tipp: Beachten Sie, dass sich gerade und ungerade Potenzen getrennt auswerten lassen.

(b) Weisen Sie die Gültigkeit der Beziehung exp$(A) = U$ exp$(U^{-1}AU)U^{-1}$ mit einer invertierbaren Matrix U nach, indem Sie in der Potenzreihe geeignete Ausdrücke zusammenfassen.

(c) Die soeben bewiesene Identität ist besonders nützlich, falls U so gewählt wird, dass $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix ergibt. Wie ist U im vorliegenden Fall zu wählen? Erhalten Sie wiederum die bekannte Lösung?